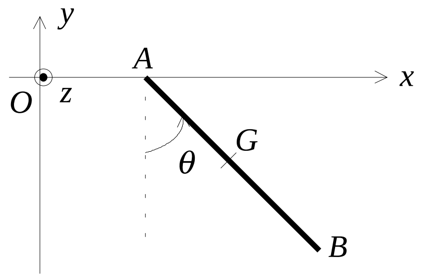
-EXERCICE 17.8-

• ENONCE :

« Translation et rotation d'une barre »



On considère une barre homogène AB, de masse m et de longueur 2a, demeurant dans le plan vertical xOy.
Son extrémité supérieure A coulisse sans frottement le long de l'axe Ox.
On donne le moment d'inertie de la barre par rapport à son centre de masse G, soit:

$$J = \frac{1}{3}ma^2$$

1) Déterminer l'équation différentielle à laquelle satisfait l'angle $\theta(t)$; on prendra $\vec{v}_G(0) = \vec{0}$.
2) Dans le cas où $\theta(t)$ reste petit, simplifier l'équation précédente en ne conservant que les termes du premier ordre ; en déduire $\theta(t)$ et $\vec{v}_A(t)$.

   On prendra les conditions initiales suivantes : $\vec{v}_A(0) = \vec{0}$; $\theta(0) = \theta_0$; $\frac{d\theta}{dt}(0) = 0$.

• CORRIGE :

«Translation et rotation d'une barre »

1) Le système (la barre) possède trois degrés de liberté **à priori** : deux de translation (position de G dans le plan xOy) et le troisième de rotation (repéré par l'angle θ) ; en fait, l'ordonnée de G et l'angle θ sont liés par la relation :

$y_G = -a\cos\theta$ $\Rightarrow$ **à posteriori**, il n'y a que **deux** degrés de liberté ⇒ on utilisera le théorème de la résultante cinétique (TRC) projeté sur Ox (ce qui ne fait pas intervenir la force **verticale** $\vec{N}$ inconnue qu'exerce l'axe Ox sur le point A) **et** le théorème de l'énergie cinétique.

Rq : si l'on utilisait la projection du TRC sur l'axe Oy, on pourrait déterminer $\vec{N}$ grâce au théorème du moment cinétique barycentrique : ce serait simplement un peu plus long.

• En l'absence de frottements, le TRC projeté sur l'axe Ox conduit à :

$m\dfrac{d^2x_G(t)}{dt^2} = 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{dx_G(t)}{dt} = cste = \dfrac{dx_G(0)}{dt} = 0 \;\Rightarrow$ le point G se déplace uniquement verticalement.

Par ailleurs : $y_G = -a\cos\theta \;\Rightarrow\; \dfrac{dy_G(t)}{dt} = a\sin\theta(t)\times\dfrac{d\theta(t)}{dt} \;\Rightarrow\; \boxed{\vec{v}_G = a\sin\theta(t)\times\dfrac{d\theta(t)}{dt}\vec{e}_y}$

• En l'absence de forces dissipatives, **l'énergie mécanique** de la barre **se conserve**, d'où :

$$\frac{d(E_C+E_P)}{dt} = 0 \qquad (1)$$

♦ le théorème de König fournit l'énergie cinétique :

$$E_C = \frac{1}{2}mv_G^2 + E_C^* = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}J\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}ma^2\times\sin^2\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \frac{1}{6}ma^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}ma^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\left(\frac{1}{3}+\sin^2\theta\right)$$

♦ en prenant l'origine des énergies potentielles en $y=0$, il vient : $E_P = -mga\cos\theta$

• La relation (1) conduit alors à :

$$2\times\frac{1}{2}ma^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)\times\frac{d^2\theta}{dt^2}\times\left(\frac{1}{3}+\sin^2\theta\right)+\frac{1}{2}ma^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\times 2\sin\theta\times\cos\theta\times\frac{d\theta}{dt}+mga\sin\theta\times\frac{d\theta}{dt}=0$$

En simplifiant par $ma^2\times\dfrac{d\theta}{dt}$, on obtient l'équation différentielle demandée :

$$\boxed{\left(\frac{1}{3}+\sin^2\theta\right)\times\frac{d^2\theta}{dt^2}+\sin\theta\cos\theta\times\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2+\frac{g}{a}\times\sin\theta=0} \qquad (2)$$

2) Les termes en $\sin^2\theta$ et $\left(\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2$ étant du second ordre en θ, l'équation (2) devient au premier ordre, avec $\sin\theta \simeq \theta$:

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{3g}{a}\times\theta=0} \qquad (3)$$

• En tenant compte des conditions initiales, on trouve pour l'angle θ :

$$\boxed{\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t)} \qquad (4) \qquad \text{avec : } \boxed{\omega = \sqrt{\frac{3g}{a}}}$$

• La relation du champ des vitesses dans un solide donne : $\vec{v}_A = \vec{v}_G + \overrightarrow{AG} \wedge \vec{\Omega} = \vec{v}_G + \overrightarrow{AG} \wedge \frac{d\theta}{dt}\vec{e}_z$

Or $\vec{v}_A = v_A \vec{e}_x$ et $\vec{v}_G \cdot \vec{e}_x = 0 \Rightarrow$ le calcul de $\vec{v}_A$ se ramène à :

$$\vec{v}_A = \left(\overrightarrow{AG} \wedge \frac{d\theta}{dt}\vec{e}_z \cdot \vec{e}_x\right)\vec{e}_x = \left[\left(\begin{vmatrix} a\sin\theta \\ -a\cos\theta \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ d\theta/dt \end{vmatrix}\right) \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}\right]\vec{e}_x = -a\cos\theta \times \frac{d\theta}{dt}\vec{e}_x$$

Au premier ordre, $\cos\theta \simeq 1 \Rightarrow$ l'expression (4) permet d'en déduire : $\boxed{\vec{v}_A = a\omega\theta_0 \sin(\omega t)\vec{e}_x}$

